



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



SOCIETATEA  
DE ȘTIINȚE  
MATEMATICE  
DIN ROMÂNIA

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALA - 17.02.2018 - CLASA A VII - A**  
**BAREM DE CORECTARE**

**SUBIECTUL 1**

(2p)a) Arătați că  $\frac{\sqrt{ab}}{a+b} \leq \frac{1}{2}$ , pentru orice a și b numere reale mai mari ca zero.

(5p)b) Demonstrați că:  $\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{12}}{7} + \dots + \frac{\sqrt{2016 \cdot 2017}}{4033} < 1008$ .

S.G.M. 10/2017

**Rezolvare și barem:**

a)  $\frac{\sqrt{ab}}{a+b} \leq \frac{1}{2}$  cu  $a+b > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \leq a+b$  ..... 1p

$(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$  ..... 1p

b) Egalitatea are loc pentru  $a = b$  ..... 1p

Dacă  $a \neq b$ , atunci  $\frac{\sqrt{ab}}{a+b} < \frac{1}{2}$  ..... 1p

Pentru  $a=1, b=2 \Rightarrow \frac{\sqrt{1 \cdot 2}}{1+2} < \frac{1}{2}$

Pentru  $a=2, b=3 \Rightarrow \frac{\sqrt{2 \cdot 3}}{2+3} < \frac{1}{2}$  ..... 1p

Pentru  $a=3, b=4 \Rightarrow \frac{\sqrt{3 \cdot 4}}{3+4} < \frac{1}{2}$

.....

Pentru  $a=2016, b=2017 \Rightarrow \frac{\sqrt{2016 \cdot 2017}}{2016+2017} < \frac{1}{2}$  ..... 1p

Prin însumarea celor 2016 relații obținem:

$\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{12}}{7} + \dots + \frac{\sqrt{2016 \cdot 2017}}{4033} < 1008$  ..... 1p



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



SOCIETATEA  
DE ȘTIINȚE  
MATEMATICE  
DIN ROMÂNIA

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALA - 17.02.2018  
BAREM DE CORECTARE  
CLASA A VII - A**

**SUBIECTUL 2**

(3p)a) Determinați  $a \in \mathbb{Z}$  astfel încât  $17 - 16^a = M_4$ .

(4p)b) Determinați  $a$  și  $b$  numere întregi astfel încât  $2016^a = a^{2n} + 4b + 2017$ , unde  $n \in \mathbb{N}$ , nenul, fixat.

Aron Roxana, Rm. Vâlcea

**Rezolvare și barem:**

a)  $16 = M_4 \Rightarrow 16^a = M_4 \dots\dots\dots 1p$

Dacă  $a \neq 0 \Rightarrow 17 = M_4 + 16^a \Rightarrow 17 = M_4$ , imposibil  $\dots\dots\dots 1p$

$\Rightarrow a = 0 \Rightarrow 17 - 1 = 16 = M_4 \dots\dots\dots 1p$

b) Pentru  $a \neq 0$  avem:  $2016^a = M_4$ ,  $4b = M_4$ ,  $2017 = M_4 + 1 \dots\dots\dots 1p$

$a^n \in \{M_4, M_4 + 1, M_4 + 2, M_4 + 3\} \Rightarrow a^{2n} \in \{M_4, M_4 + 1\} \dots\dots\dots 1p$

$\Rightarrow a^{2n} + 4b + 2017 \in \{M_4 + 1, M_4 + 2\}$ . Dar  $2016^a = M_4$ , imposibil  $\dots\dots\dots 1p$

$\Rightarrow a = 0 \Rightarrow 1 = 4b + 2017 \Rightarrow 4b = -2016 \Rightarrow b = -504 \dots\dots\dots 1p$

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALĂ - 17.02.2018**  
**BAREM DE CORECTARE**  
**CLASA A VII - A**

**SUBIECTUL 3**

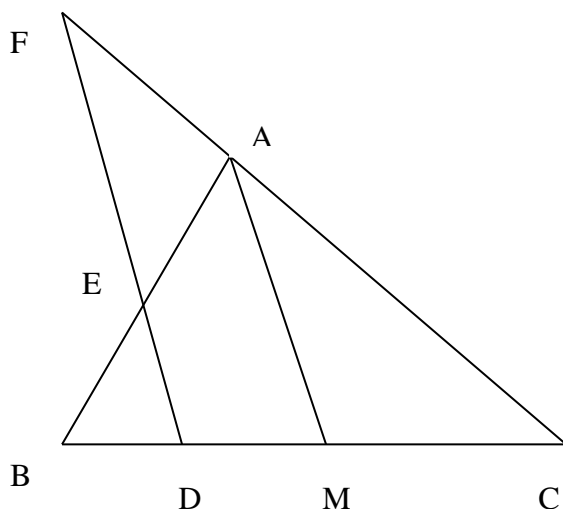
Fie triunghiul ABC. Fie  $F \in AC$  astfel încât  $A \in (CF)$  cu  $AF < AC$ . Paralela prin F la AM, unde M este mijlocul segmentului (BC), intersectează latura (AB), respectiv (BC) în E și respectiv D.

(3p)a) Arătați că:  $AE \cdot AC = AB \cdot AF$ .

(4p)b) Arătați că:  $DE + DF = \text{constant}$ .

Pîrvuță Cristina, Rm. Vâlcea

**Rezolvare si barem:**



$$\text{a) } \triangle ABM, DE \parallel AM, \text{ din th. Thales } \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{DM}{BM}$$

$$\text{Dar } (MB) \equiv (MC) \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{DM}{MC} \quad (1) \dots\dots\dots 1p$$

$$\triangle CDF, AM \parallel FD, \text{ din th. Thales } \Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{DM}{MC} \quad (2) \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Din (1) si (2) } \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow AE \cdot AC = AB \cdot AF \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{b) Din TFA in } \triangle ABM \text{ cu } DE \parallel AM \Rightarrow \frac{DE}{AM} = \frac{BD}{BM} \Rightarrow DE = \frac{AM \cdot BD}{BM} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Din TFA in } \triangle CDF \text{ cu } AM \parallel FD \Rightarrow \frac{AM}{FD} = \frac{CM}{CD} \text{ si } (MB) \equiv (MC) \Rightarrow FD = \frac{AM \cdot CD}{BM} \dots\dots\dots 1p$$

$$DE + DF = \frac{AM \cdot (BD + CD)}{BM} = \frac{AM \cdot BC}{BM} \dots\dots\dots 1p$$

$$BC = 2BM \Rightarrow DE + DF = 2AM = \text{constant} \dots\dots\dots 1p$$

BAREM DE CORECTARE CLASA A VII - A

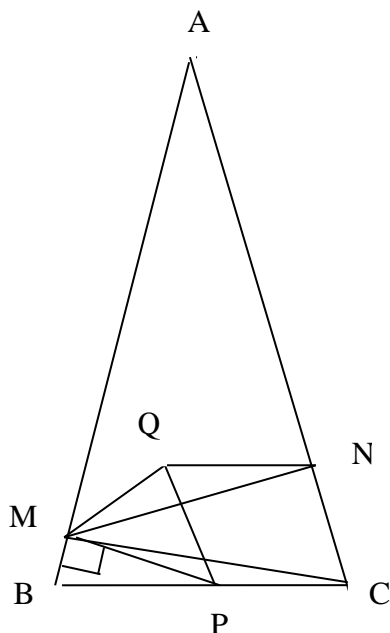
SUBIECTUL 4

Se consideră  $\triangle ABC$  cu  $(AB) \equiv (AC)$  și  $m(\hat{A}) = 20^\circ$ . Fie  $N \in (AC)$  astfel încât  $(NC) \equiv (PC)$ , unde  $P$  este mijlocul segmentului  $(BC)$ . Paralela prin  $N$  la  $BC$  se intersectează cu paralela prin  $P$  la  $AC$  în  $Q$ . Fie  $M$  piciorul perpendicularei din  $C$  pe  $AB$ , cu  $M \in (AB)$ .

(3p) a) Calculați  $m(\angle NQP)$ .

(4p) b) Calculați  $m(\angle AMN)$ .

**Rezolvare și barem:**



a)  $\triangle ABC$  isoscel de bază  $(BC)$  cu  $m(\hat{A}) = 20^\circ \Rightarrow m(\hat{A} \hat{B} C) = m(\hat{A} \hat{C} B) = 80^\circ$  .....1p

$QN \parallel PC$  și  $QP \parallel NC \Rightarrow QNCP$  paralelogram .....1p

$QNCP$  paralelogram cu  $m(\hat{N} \hat{C} P) = 80^\circ \Rightarrow m(\hat{N} \hat{Q} P) = 80^\circ$  .....1p

b)  $QNCP$  paralelogram cu  $(NC) \equiv (PC) \Rightarrow QNCP$  romb  $\Rightarrow m(\hat{Q} \hat{P} C) = 100^\circ$  și  
 $(QP) \equiv (PC) \equiv (CN) \equiv (NQ)$ .

În  $\triangle MBC$ , din suma măsurilor unghiurilor  $\Rightarrow m(\hat{M} \hat{C} B) = 10^\circ$

$\triangle MBC$  dreptunghic în  $M$  cu  $(MP)$  mediana  $\Rightarrow MP = \frac{BC}{2}$ . Dar  $PC = \frac{BC}{2} \Rightarrow$

$\triangle MPC$  isoscel de bază  $(MC)$  .....1p

$\Rightarrow m(\hat{P} \hat{M} C) = m(\hat{P} \hat{C} M) = 10^\circ \Rightarrow m(\hat{M} \hat{P} C) = 160^\circ \Rightarrow m(\hat{M} \hat{P} B) = 20^\circ$

$m(\hat{M} \hat{P} Q) = m(\hat{M} \hat{P} C) - m(\hat{Q} \hat{P} C) = 160^\circ - 100^\circ = 60^\circ$  .....1p

Din demonstrație:  $(PC) \equiv (PM)$  și  $(QP) \equiv (PC) \Rightarrow \triangle MQP$  isoscel cu  $m(\hat{M} \hat{P} Q) = 60^\circ \Rightarrow$

$\triangle MQP$  echilateral  $\Rightarrow m(\hat{Q} \hat{M} P) = 60^\circ$

$m(\hat{M} \hat{Q} N) = 80^\circ + 60^\circ = 140^\circ$  și  $\triangle QMN$  isoscel de bază  $(MN) \Rightarrow m(\hat{Q} \hat{M} N) = 20^\circ$  .....1p

$m(\hat{N} \hat{M} C) = m(\hat{Q} \hat{M} P) - m(\hat{Q} \hat{M} N) - m(\hat{P} \hat{M} C) = 60^\circ - 20^\circ - 10^\circ = 30^\circ$

$m(\hat{A} \hat{M} N) = m(\hat{A} \hat{M} C) - m(\hat{N} \hat{M} C) = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$  .....1p